جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم

نادي النجاح كلية العلوم
success club

SUJET DES EXAMEN

Sma3/smi3

من إنجاز نادي النجاح

www.facebook.com/succes.club
www.clubnajah.blogspot.com

2 ème Edition

2014/2015

Université Chouaib Doukkali
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014

Filière SMIA4

Epreuve de Probabilités & Statistique
Juin 2014

(Durée : 1h 30 mn)

<u>IMPORTANT</u> :

- Les documents ne sont pas autorisés et les trois exercices sont indépendants.
- On peut traiter chaque question en admettant les résultats précèdents s'ils sont nécessaires.

Dans toute l'épreuve, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espace probabilisé de base.

Exercice 1
Soeint A et B deux événements tels que :

$$P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.6, \quad P(A \cup \overline{B}) = 0.7$$

On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

1. Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir A sachant que B n'est pas réalisé ?

Exercice 2
1. Soit X une variable aléatoire réelle de foction caractéristique Φ_X. Soit $Y = aX + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la fonction caractéristique de Y en fonction de Φ_X.
2. On suppose que X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La fonction de densité de X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

   a) Déterminer la fonction caractéristique de X.
   b) Quelle est la fonction caractéristique de $Y = 3X + 2$?
   c) Quelle est la fonction caractéristique de $Z = X + Y$?

Exercice 3
Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Soit ϕ la fonction de répartition de X.

1. a) Définir la fonction caractéristique de X.
   b) Représenter graphiquement la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x^2 + 2x$$

2. On définit la variable aléatoire réelle Z par

$$Z(\omega) = (X(\omega))^2 + 2X(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

a) Déterminer la fonction de répartition de Z en fonction de ϕ, notée $G(z)$.
b) En déduire la fonction de densité de Z, notée $g(z)$.
c) Calculer l'espérance mathématique de Z.
d) Quelle est la probabilité p_0 de l'événement $B = \{\omega \in \Omega \quad \text{tel que} \quad Z(\omega) > 0\}$?
Application numérique : On donne $\phi(2) = 0.98$.

(On rappelle pour toute fin utile que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Bon travail !

Université Chouaib Doukkali
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014
Filières : SMI4 & SMA4

EXAMEN DE RATTRAPAGE
Probabilités & Statistique
Juin 2014
(Durée : 1h 30 mn)

IMPORTANT :
- Les documents ne sont pas autorisés et les trois exercices sont indépendants.
- On peut traiter chaque question en admettant les résultats précèdents s'ils sont nécessaires.

Dans toute l'épreuve, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espace probabilisé de base.

Exercice 1
On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

1. Soeint A et B deux événements tels que : $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{3}{8}$. Montrer que

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{8}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour n événements $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, montrer que

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p et p' respectivement. On sait que la probabilité d'avoir simultanément X et Y égales à 1 vaut $\frac{1}{6}$. On pose $Z = X \times Y$.

1. Montrer que Z est une variable aléatoire de Bernoulli, et donner son paramètre.
2. Donner le tableau de la loi conjointe des variables aléatoires X et Y.
3. Calculer, en fonction de p et p', la covariance du couple aléatoire (X, Y).

Exercice 3
Soient p et q deux nombres réels strictement positifs. On pose

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

1. a) Justifier l'existence de $\beta(p, q)$.
   b) En supposant $q > 1$, établir la relation de récurence

$$\beta(p+1, q+1) = \frac{p}{q-1} \beta(p, q)$$

   c) En déduire la valeur de $\beta(p, q)$ lorsque p et q sont des entiers naturels.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Vérifier que f est une fonction de densité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle continue de fonction de densité f.
a) Montrer l'existence de l'espérance mathématique de X, $E(X)$, et de sa variance $Var(X)$.
b) Lorsque $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Bon travail !

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2011/2012
Niveaux : SMA4-SMI4

EXAMEN FINAL
DE PROBABILITÉS & STATISTIQUE
5 Juin 2012 - Durée : 1 H 30 mn

N.B. :
- Les quatre (4) exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre, et ils sont indépendants !
- Les tables statistiques jointes sont celle de la loi normale centrée-réduite et de Student.

Exercice 1. Dans une urne, on a 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire sans remise trois (3) boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que le plus grand numéro tiré soit le 5 ?
2. Quelle est la probabilité que les trois numéros tirés soient inférieurs ou égaux à 5 ?
3. Quelle est la probabilité que le produit des trois numéros tirés soit pair ?
4. Sachant que deux des boules tirées portent un numéro inférieur à 6, quelle est la probabilité que la troisième boule aussi porte un numéro inférieur à 6 ?

Exercice 2. Dans une colonie de vacances, il y a 40 % de filles ; On sait par ailleurs que 60% des enfants savent nager, et que 30 % des filles savent nager. On choisit au hasard un enfant (fille ou garçon).
On note F l'événement : "L'enfant choisi est une fille". Et on note N l'événement : "L'enfant choisi sait nager".
Pour un événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.EL JADIDA
LE PRÉSIDENT

1. Calculer $P(N|F)$ et $P(F|N)$.
2. Calculer $P(\overline{F} \cap \overline{N})$.
3. L'enfant choisi ne sait pas nager, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
4. L'enfant choisi est un garçon, quelle est la probabilité qu'il ne sache pas nager ?

Exercice 3. 1) Rappeler la définition de la fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire (notée X).
2) En utilisant la fonction génératrice des moments pour une loi binomiale $B(n;p)$, retrouver son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 4. Dans la société "2K-Maroc1", le poids d'une boîte de pois est supposé suivre une loi normale notée X. Pour en déterminer les paramètres, une étude statistique a été effectuée sur un échantillon de 101 boîtes ; Et les résultats de cette étude ont été regroupés comme suit :(données en Décagrammes)

Intervalles	[20 ;24]	]24 ;28]	]28 ;32]	]32 ;36]	]36 ;40]	]40 ;44]
Effectifs	8	20	30	28	n_5	6

1. Déterminer l'effectif de la classe $]36; 40]$.
2. Quelle est la classe modale de cette série statistique ?
3. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation du poids moyen théorique d'une boîte de pois. (on donnera le résultat avec trois chiffres après la virgule)
4. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de l'écart-type du poids d'une boîte de pois. (on donnera le résultat avec trois chiffres après la virgule)
5. Donner l'intervalle de confiance à 95 % pour le poids moyen théorique d'une boîte de pois.
6. Donner l'intervalle de confiance à 88 % pour la proportion, notée p, des boîtes ayant un poids entre 28 et 36 décagrammes.

****

Bon courage

1

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2012/2013
Niveaux : SMA4-SMI4

EXAMEN FINAL
DE PROBABILITÉS & STATISTIQUE
7 Juin 2013 - Durée : 1 H 30 mn

N.B. :
- Les quatre (4) exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre, et ils sont indépendants !
- Les tables statistiques jointes sont celle de la loi normale centrée-réduite et de Student.

Exercice 1. On choisit au hasard une des trois urnes, notées respectivement A, B et C ; La probabilité de choisir B est le double de celle de choisir A, alors que celle de choisir C est le triple de celle de choisir l'une ou l'autre entre A et B. On sait par ailleurs que A contient 16 boules blanches et 4 boules noires, et que B contient 20 boules dont 8 sont noires, alors que C contient 6 boules noires et 8 boules blanches.
On tire simultanément deux boules de l'urne choisie ; ces boules sont noires. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi l'urne B ?

Exercice 2. (Une "presque" question de cours ! !)
1) Rappeler la définition de la fonction caractéristique pour une variable aléatoire (notée X).
Remarque : On précisera autant que possible les notations utilisées.
2) En utilisant la fonction caractéristique pour une variable aléatoire exponentielle (de densité de probabilité $f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad pour \quad x \geq 0$), retrouver son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 3. Le directeur de la Société "EHCRAM" annonce, sur la base d'un sondage effectué auprès de 700 clients, que la proportion de satisfaits concernant le nouveau produit "Yahala" se situe entre $65,44\%$ et $70,56\%$.

1. Combien de clients, approximativement, se sont déclarés satisfaits lors du sondage en question ?
2. Quel est, approximativement, le seuil de confiance que l'on peut associer à l'intervalle annoncé par le directeur de "EHCRAM" ?

Exercice 4. La société "Bois-100" désire demander le label 'Haut de Gamme' pour le nouveau produit 'LOLALOCA' ; pour ce faire, le service commercial réalisa une série de tests de résistance avant cassure à des planches choisies au hasard. Les données ont été regroupées dans le tableau suivant :(on note X la variable aléatoire représentant la résistance avant cassure mesurée en Kgs/Cm^2)

Intervalles	[3 ;5]	]5 ;7]	]7 ;9]	]9 ;11]	]11 ;13]	]13 ;15]	]15 ;17]
Effectifs	4	12	20	32	18	10	5

N.B. : Les résultats seront donnés avec trois (3) chiffres après la virgule.

1. Estimer le mode de cette série statistique.
2. Estimer la médiane de cette série statistique.
3. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la résistance moyenne théorique, notée μ.
4. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la variance théorique, notée σ^2, de la variable aléatoire X.
5. Donner l'intervalle de confiance à 90 % pour la résistance moyenne avant cassure pour le produit 'LOLALOCA'.

****

Bon courage

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2011/2012
Niveaux : SMA4-SMI4

EXAMEN DE RATTRAPAGE
DE PROBABILITÉS & STATISTIQUE
(Mardi 19 Juin 2012 * Durée : 1 H 30)

N.B. :
- Les deux exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre, et ils sont indépendants !
- Les tables statistiques jointes sont celles de la loi normale centrée-réduite, et de Student.

Exercice 1. Q.C.M (Questions à Choix Multiples)
Pour chacune des suggestions proposées, choisir la (ou les) proposition(s) qui est (sont) exacte(s). Toute justification serait appréciée à sa juste valeur ! ! !

1. Dans une population-mère de 1000 individus, le nombre d'échantillons de taille 50 que l'on peut tirer (naturellement et habituellement) est ... :
   a) 1000^{50}
   b) $\frac{1000!}{50!950!}$
   c) $\frac{1000!}{950!}$
   d) autre valeur.
2. Dans une urne contenant 10 boules blanches et 6 boules noires, on effectue 2 tirages avec remise ; la probabilité de tirer deux boules blanches est égale à :
   a) $(\frac{5}{8})^2$
   b) $\frac{10}{16}$
   c) $\frac{1}{10}$,
   d) autre valeur.
3. Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,7$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0,2$. Où $\overline{E}$ désigne l'événement contraire de E. Parmi les probabilités suivantes, quelle(s) est (sont) celle(s) qui est (sont) vraie(s) ? :
   a) $P(A \cup B) = 0,8$
   b) $P(A \cap B) = 0,42$
   c) $P(A \cup B) = 0,9$
   d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$
4. Pour une variable aléatoire $X \simeq B(500; 0,4)$, on a ... :
   a) $P(X \leq 24) \simeq 0,0015$
   b) $P(X \geq 24) \simeq 1$
   c) $P(182 \leq X \leq 218) \simeq 0,9545$
   d) $P(182 \leq X \leq 218) \simeq 0,9090$
5. Pour une variable aléatoire X de moyenne théorique μ et d'écart-type σ, parmi les inégalités suivantes, celle qui correspond à l'Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff est ... :
   a) $P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
   b) $P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
   c) $P(X - \varepsilon \leq \mu \leq X + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
   d) $P(X - \varepsilon \leq \mu \leq X + \varepsilon) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

T.S.V.P

6. L'intervalle de confiance à 80 % pour une moyenne théorique μ dans le cas où l'écart-type σ est connu est approximativement ... :
   a) $[\overline{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
   b) $[\overline{x} - 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
   c) $[\overline{x} - 1,28\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1,28\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
   d) $[\overline{x} - 0,85\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 0,85\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Exercice 2. Le directeur de la société "IciLaba", spécialisée dans les services, estime que son entreprise représente un chiffre d'affaires pouvant être considéré comme une variable aléatoire, notée X, ayant une distribution normale. Pour justifier ses dires, il a pris un échantillon de 101 des agences présentes dans différents pays. Les données sont présentées dans le tableau suivant : (données en 10^9 de Dollars US)

Intervalles	[20 ;24]	]24 ;28]	]28 ;32]	]32 ;36]	]36 ;40]	]40 ;48]
Effectifs	6	21	31	28	9	n_6

1. Déterminer l'effectif de la classe $]40; 48]$.
2. Donner l'estimation du mode de cette série statistique ?
3. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation du chiffre d'affaires moyen pour la société. (on donnera le résultat avec trois chiffres après la virgule)
4. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la variance de la variable aléatoire représentant le chiffre d'affaires d'"IciLaba". (on donnera le résultat avec trois chiffres après la virgule)
5. Donner l'intervalle de confiance à 95 % pour le chiffres d'affaire de la société.
6. Donner l'intervalle de confiance à 84 % pour la proportion, notée p, des agences ayant un chiffre d'affaires supérieur à 32 Milliards de Dollars US.

****

Bon courage

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2013/2014
Niveau : SMP3

EXAMEN-RATTRAPAGE
DE PROBABILITÉS & STATISTIQUE
5 Février 2014 - Durée : 1 H 30 mn

N.B. :
- Les quatre (4) exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre, et ils sont indépendants !
- Les tables statistiques jointes sont celle de la loi normale centrée-réduite et de Student.

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité et deux événements A et B tels que : $P(A) = 0,6$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0,3$. $\overline{E}$ désigne l'événement contraire de E.

1. Calculer $P(A \cup B)$ si l'on considère que les événements A et B sont incompatibles (disjoints).
2. Calculer $P(A \cup B)$ si l'on considère que les événements A et B sont indépendants.

Exercice 2. O suppose que l'on a, au niveau d'une population supposée infinie, le **quart des adultes** qui a le permis de conduire. Sur un échantillon de 200 personnes, en âge de conduire, on considère la variable aléatoire, notée X, qui désigne "le nombre de personnes ayant le permis de conduire dans l'échantillon".

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon considéré, entre 42 et 73 personnes qui ont le permis de conduire.

Exercice 3. A l'Université "DESTATES", une étude, concernant la note obtenue à l'examen de fin de premier semestre, a été réalisée; Les données sont présentées dans le tableau suivant :

Intervalles	[0 ;4]	]4 ;8]	]8 ;12]	]12 ;16]	]16 ;20]
Effectifs	25	33	47	28	18

N.B. : Les résultats seront donnés avec trois (3) chiffres après la virgule.

1. Estimer le mode de cette série statistique.
2. Estimer la médiane de cette série statistique.
3. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la note moyenne théorique, notée μ.
4. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la variance théorique, notée σ^2, de la variable aléatoire X en question.
5. Donner l'intervalle de confiance à 95 % pour la note moyenne théorique.
6. Soit p la proportion d'étudiants ayant une note inférieure ou égale à 8 ; Donner l'intervalle de confiance à 93 % pour p.

Exercice 4. Soit le couple aléatoire (X, Y) de densité de probabilité conjointe f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-x+y} & \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

1. Donner la valeur de la constante k pour que f soit une densité de probabilité conjointe.
2. Calculer les densités marginales, notées f_X et f_Y, associées au couple aléatoire (X, Y).
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

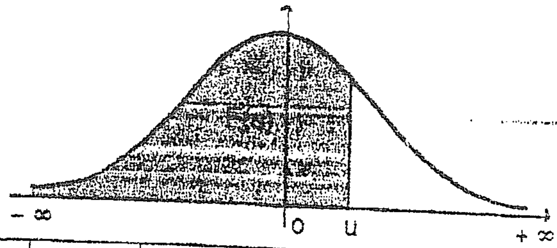
****

Bon courage

÷CLUB NAJAH÷
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

I Loi Normale

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

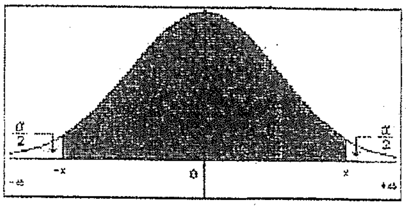


u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Table 4

Loi de Student



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
$1-\alpha$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
ν = ddl											
1	0,0000	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	0,0000	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,328	31,600
3	0,0000	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,214	12,924
4	0,0000	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,0000	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,0000	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,0000	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,0000	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,0000	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,0000	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,0000	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,0000	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,0000	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,0000	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,0000	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,0000	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,0000	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,0000	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,0000	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,0000	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,0000	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,0000	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,0000	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,0000	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,0000	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,0000	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,0000	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,0000	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,0000	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,0000	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
40	0,0000	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,0000	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,0000	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,0000	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,0000	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,0000	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,0000	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,0000	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
∞	0,0000	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0903	3,2906

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2013/2014
Niveau : SMP3

EXAMEN FINAL
DE PROBABILITÉS & STATISTIQUE
18 Janvier 2014 - Durée : 1 H 30 mn

N.B. :

- Les quatre (4) exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre, et ils sont indépendants !
- Les tables statistiques jointes sont celle de la loi normale centrée-réduite et de Student.

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité et deux événements A et B tels que : $P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,4 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = 0,8$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir A et de ne pas avoir B ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas avoir A sachant que l'on a B ?

Exercice 2. On a deux urnes U_1 et U_2 ; l'urne U_1 contient 6 boules rouges et 10 boules vertes, et l'urne U_2 contient 4 boules vertes et 12 boules blanches. On lance un dé équilibré, si le résultat est plus grand que quatre (4), on choisit de tirer la boule de U_1, sinon on tire la boule de U_2.
A l'issue d'un tirage de boule, on constate que la boule tirée est verte ; Quelle est la probabilité que l'urne utilisée soit U_1 ?

Exercice 3. Lors d'une étude sur la résistance d'un alliage constituant une barre métallique, on a mesuré le poids supporté avant cassure d'un échantillon de tiges. Les données ont été regroupées dans le tableau suivant :(on note X la variable aléatoire représentant la résistance avant cassure mesurée en Kgs/cm^2)

Intervalles	[4 ;8]	]8 ;12]	]12 ;16]	]16 ;20]	]20 ;24]	]24 ;28]	]28 ;32]
Effectifs	6	12	20	34	21	14	4

N.B. : Les résultats seront donnés avec trois (3) chiffres après la virgule.

1. Quelle est la classe modale ?
2. A quelle classe appartient la médiane ?
3. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la résistance moyenne théorique, notée μ.
4. Après en avoir rappelé la formule, donner l'estimation de la variance théorique, notée σ^2, de la variable aléatoire X en question.
5. Donner l'intervalle de confiance à 90 % pour la résistance moyenne avant cassure.
6. Soit p la proportion de tiges ayant une résistance avant cassure variant entre 16 et 28 kgs/cm^2 ; Donner l'intervalle de confiance à 88 % pour p.

Exercice 4. Soit le couple aléatoire (X, Y) de densité de probabilité conjointe f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x \times \cos y & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où D est le domaine de définition de f.

1. Entre les "pavés" $[-\frac{\pi}{2}; 0] \times [0; \frac{\pi}{2}]$ et $[0; \frac{\pi}{2}] \times [0; \frac{\pi}{2}]$, quel est celui qui représente le domaine de définition D de f ? Justifier la réponse.
2. Calculer les densités marginales, notées f_X et f_Y, associées au couple aléatoire (X, Y).
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

****

Bon courage

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2012/2013
Section : SMP3

Epreuve de probabilité et statistique

Durée : 1H30mn

Exercice 1

Soit X un caractère quantitatif mesuré sur une population Ω de cardinal N, et Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 une partition de Ω. On pose pour $i = 1,2,3$:

$f_i = n_i/N$, n_i=card(Ω_i), et m_i désigne la moyenne arithmétique de X sur Ω_i.

1) Rappeler la définition de la moyenne arithmétique $\bar{x}$ de X sur Ω.

2) i) Exprimer $\bar{x}$ en fonction des $f_i, m_i, i = 1, 2, 3$, tout en justifiant votre réponse.

   ii) Calculer la valeur de f_1 et f_2, si $f_3 = 0.4$ *et* $m_1 = 10$, $m_2 = 30$, $m_3 = 20$, $\bar{x} = 24$.

3) On suppose que $\Omega_1 = (5 \leq X \leq 7)$, $\Omega_2 = (7 < X \leq 9)$, $\Omega_3 = (9 < X \leq 14)$,

$$n_1 = 50,\ n_2 = 80,\ n_3 = 40, \qquad m_1 = 6,\ m_3 = 10.$$

a) Tracer l'histogramme.
b) Evaluer une estimation des quantiles $q_{0,1}$, $q_{0,5}$ d'ordres respectifs 0,1 et 0,5.
c) Estimer le nombre d'individus de la sous-population $\Omega' = (q_{0,1} \leq X \leq q_{0,5})$.
d) Déterminer la moyenne arithmétique de X sur Ω_2 pour que $\bar{x}$ soit égale à la médiane.

Exercice 2

On rappelle que la fonction gamma d'Euler est définie pour $a > 0$ par : $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.
Soit $a, b > 0$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, T, P) et qui admet une fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} bx^{a-1}e^{-2x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Pour $a = 1$, calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 2)$.
2) Déterminer b à l'aide de la fonction Γ.
3) Calculer la moyenne et la variance de X en fonction de a.

Université Chouaïb Doukkali

Faculté des sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire : 2011/2012

Section : SMP3

Epreuve de Probabilité et Statistique

Durée : 1h30mn

Exercice 1

On considère le tableau suivant qui représente l'observation de deux caractères quantitatifs x et y sur une population donnée :

x	-1.5	-1.3	-1	-0.7	-0.5	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
y	3.5	3	1.8	1.6	0.7	0.1	0.3	1,1	1,4	2,2	2,2

1) Calculer la moyenne arithmétique et la variance de x, x' et y, où $x' = |x|$.
2) Evaluer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de y et x. Commenter.
3) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de y et x'. Commenter.
4) Proposer une courbe de régression de y en x.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(m, \sigma^2)$ de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

On pose $Y = \frac{X-m}{\sigma}$.

1) Expliciter la densité de $N(0,1)$.
2) Exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de celle de X, et montrer que Y suit $N(0,1)$.
3) Calculer la moyenne et la variance de Y.
4) En déduire la moyenne et la variance de X.
5) On suppose que X est la longueur d'une catégorie de tiges métalliques dans un magasin, et que $m = 100, \sigma^2 = 0{,}1$. Calculer le pourcentage de tiges dont la longueur est inférieure à 100.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2012/2013
Section : SMP3

Epreuve de probabilité et statistique

-Session de rattrapage-

Durée : 1H30mn

Exercice 1

Soit X un caractère quantitatif défini sur une population Ω. Les données obtenues à partir de la mesure de X sur une sous-population Ω' de Ω sont disposées sous forme d'une série classée $[a_0, a_1]$, $]a_1, a_2]$, $]a_2, a_3]$, $]a_3, a_4]$ d'effectifs respectifs $5, 10, 6, 2$.

1) On suppose que les septs valeurs $5, 6, 6, 10, 10, 11, 12$ représentent les mesures de X sur $\Omega - \Omega'$. Calculer une estimation de la moyenne arithmétique, la variance et la médiane de X sur Ω, et ceci à partir de la série classée $[a_0, a_1]$, $]a_1, a_2]$, $]a_2, a_3]$, $]a_3, a_4]$, si $a_0 = 5$, $a_1 = 7$, $a_2 = 9$, $a_3 = 13$ et $a_4 = 15$.

2) Soit Y un autre caractère quantitatif défini sur Ω.

a) Si $Y = -2X + 5$, montrer que le coefficient de corrélation linéaire de Y et X est égal à -1.

b) Déterminer la droite d'ajustement linéaire de Y en X si $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = -15$, $\sigma_X^2 = 2$ et $\operatorname{cov}(X, Y) = -3$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de densité

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un réel a on désigne par $[a]$ la partie entière de a, c'est à dire : $[a] \leq a < [a] + 1$.

On pose $Y = [X]$;

1) Calculer la probabilité de l'événement $(X < 1)$, et en déduire celle de $(Y = 0)$.
2) Déterminer la loi de Y.
3) Evaluer la fonction génératrice de Y.
4) En déduire la moyenne et la variance de Y.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES EL JADIDA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2013/2014

Examen Rattrapage: Electricité 2 : Filières : SMA3 - SMI3

Durée : 1h 30 min

Exercice 1 : (11 pts)

Champs $\vec{B}$ et $\vec{A}$ crées par un conducteur cylindrique plein.

Les sources du champ magnétique sont en pratique souvent réalisées par des courants circulant dans des fils conducteurs. Considérons la distribution *un fil conducteur de longueur supposée infinie et* ***de section circulaire (de rayon R)***, parcouru par un courant (I) de densité $\vec{J}$ supposée uniforme :

$$\vec{J} = \begin{cases} J\,\vec{e}_z, & pour \quad \rho \leq R \\ \vec{0}, & pour \quad \rho > R \end{cases}$$

On exprime les champs $\vec{B}$ et $\vec{A}$ dans la base des coordonnées cylindriques : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

1. Quels sont les propriétés de symétries et d'invariances de cette distribution de courant.
2. Quelle est la forme des lignes de champ de $\vec{B}$?
3. Après identification des plans de symétrie et d'antisymétrie pour la distribution Σ, donner les formes de $\vec{B}$ et $\vec{A}$.
4. Par application du **théorème d'Ampère**,
   Déterminer : $\vec{B}_{ex}$ $(pour \quad \rho > R)$ et $\vec{B}_{in}$ $(pour \quad \rho \leq R)$.
5. Etudier la continuité du champ $\vec{B}$ en $r = R$.
6. Etablir la relation qui relie le flux de $\vec{B}$ et la circulation de $\vec{A}$.
7. Compte tenue des symétries de $\vec{B}$ et $\vec{A}$; **choisir un contour d'intégration (C) adéquat**. Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long de ce contour et le flux de $\vec{B}$ à travers la surface **(C)** qui s'appuie sur ce contour **(C)**.
8. En déduire $\vec{A}_{ex}$ $(pour \quad \rho > R)$ et $\vec{A}_{in}$ $(pour \quad \rho \leq R)$.
   Prendre le potentiel de référence à une distance donnée du fil, par exemple $A_z(\rho = 0) = 0$.
9. Représenter les graphes de **B** et de **A**

Questions Facultatifs :

Application : Câble coaxial

Une ligne coaxiale est réalisée à l'aide d'un **fil conducteur central cylindrique** de section circulaire **(rayon** R_1**)** entouré d'un **deuxième conducteur coaxial** (rayon **intérieur** R_2 et **rayon extérieur** R'_2).

Les deux conducteurs sont séparés par le vide. Le **conducteur central** est parcouru par un courant (I) de densité $\vec{J}$ **dont le retour** est assuré par le conducteur périphérique. Les densités de courants sont supposés uniformes.

1- Donner les expressions de $\vec{J}$ en fonction de (ρ) pour.

2- $(\rho \leq R_1)$; $(R_1 \leq \rho \leq R_2)$; $(R_2 \leq \rho \leq R'_2)$; $(\rho > R'_2)$

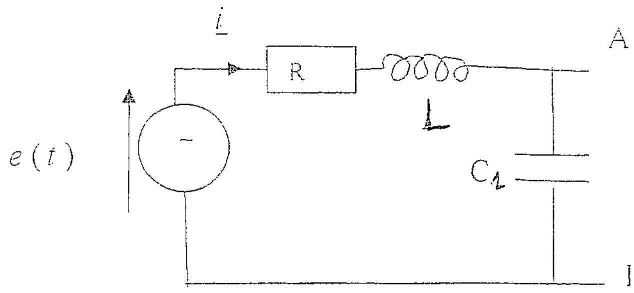
3- Par application **du théorème d'Ampère**, déterminer les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ et $\vec{A}$ en tout point de l'espace.

Exercice 2 : (9 pts)

On considère le circuit représenté ci-contre.

On donne : $e(t) = 220\sqrt{2}\cos 100\pi t$

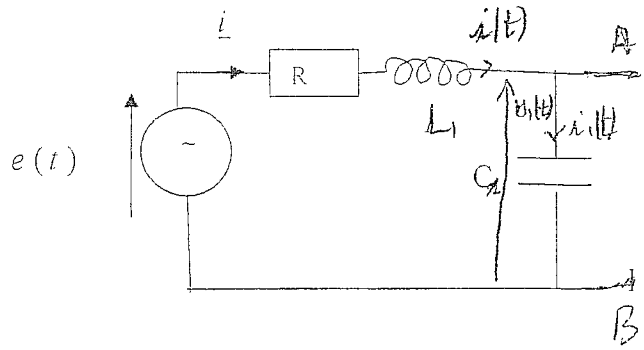
$R = 40\Omega,\ L = 0,2H\ ,C_1 = 5\mu F$



1. Déterminer le courant **i(t) qui** traverse le circuit.

$$i(t) = I_m \cos(100\pi t + \varphi)$$

2. Calculer le facteur de puissance
Calculer la puissance moyenne P consommé dans le circuit.



Il est recommandé d'améliorer le facteur de puissance. Pour cela on ajoute un condensateur (C_2) en dérivation *(parallèle)* avec la capacité (C_1) dans la branche entre A et B.

3. **En utilisant la représentation de Fresnel ;**
Donner la valeur de la capacité (C_2) qui permet d'obtenir un facteur de puissance égal à 1 ?.

4. Donner l'expression du courant i_1 (t) **qui** traverse la capacité (C_1). **Utiliser Diviseur de tension**

5. En déduire l'expression du courant i_2 (t) **qui** traverse la capacité (C_2).

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES EL JADIDA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2013/2014

Examen: Electricité 2 : Filières : SMA3 - SMI3

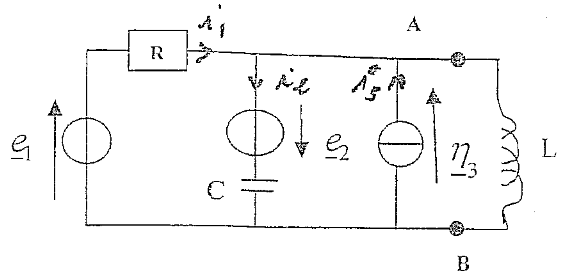
Durée : 1h 30 min

Exercice 1 : (12 pts)

1. En utilisant le **théorème de Norton** ;

Déterminer le courant complexe ($\underline{i}_L$) ; qui circule dans la bobine pure (***Branche AB***) de la figure ci-contre, en fonction de $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{\eta}_3$, R, L, C et de la pulsation ω.

On transforme d'abord les générateurs de tension en générateurs de courant.



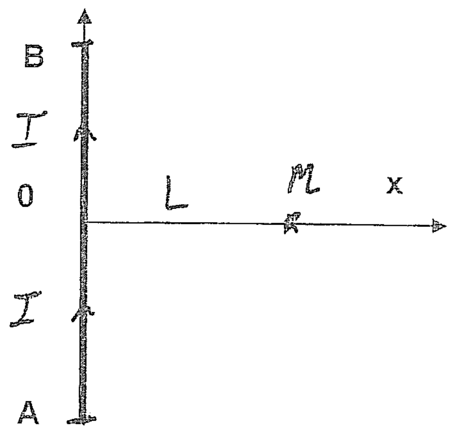
2. Retrouver l'expression de $\underline{i}_L$ par application du **théorème de Thevenin**.

3. Retrouver l'expression de $\underline{i}_L$ par application du **théorème de Millman.**

Exercice 2 : (8 pts

1. Calculer le champ magnétique créé en un point M par un *fil rectiligne ; de longueur finie* AB = 2L parcouru par un courant I ; en un point M de sa médiatrice. **M (x=L ; 0)**

2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par *un fil rectiligne* ***indéfini*** parcouru par le courant I en un point M de sa médiatrice. **M (x=L ; 0)**



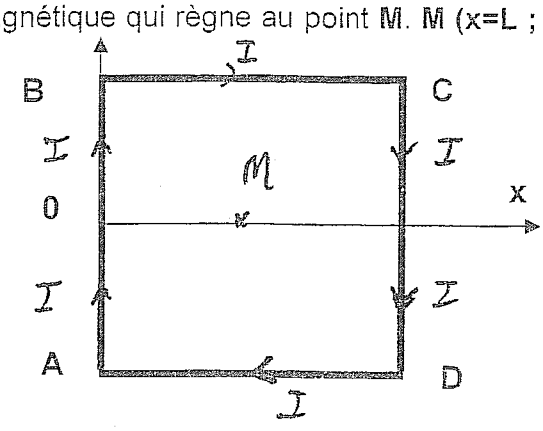
3. Quels sont les propriétés de symétries et d'invariances de cette distribution de courant dans le cas *un fil rectiligne* ***indéfini*** ?

4. Quelle est la forme des lignes de champs magnétiques passant par le point M.

5. Retrouver l'expression du champ magnétique résultat par application du **théorème d'Ampère**.

On considère un fil conducteur de Longueur **8 L** parcouru par un courant I qui forme une spire carrée **ABCD** de coté **2L.**

6. Déterminer l'expression du champ magnétique qui règne au point M. **M (x=L ; 0) situé au centre de la spire.**



UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EL JADIDA

Année Universitaire 2013-2014

SMI 3

Examen de rattrapage d'Analyse 3

Durée 3h

Exercice 1. Considérons la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}, \quad n \geq 1,\ \alpha > 0.$$

1. Montrer que $\sum_n u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Posons $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $w_n = u_n - v_n$, $n \geq 1$.
   a) Calculer l'expression de w_n pour $n \geq 1$.
   b) Montrer que $\sum_n w_n$ converge si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et diverge si $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que $\sum_n u_n$ converge si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et diverge si $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x^2}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha < -1$.
3. Supposons $\alpha \in [-1, 1[$. Posons $f(x) = \sum_n f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   i) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   ii) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Supposons que $\alpha \in [0, 1[$. Montrer que $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $\alpha >$, par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \log(x^2+y^2) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue au point $(0,0)$ pour tout $\alpha > 0$.
2. Déterminer les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent.
3. Supposons $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy + x - 2y + 1$$

1. Vérifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques (extrémaux) de f.
3. Ecrire la formule de Taylor de f à l'ordre 2 au point $(1,2)$.
4. Montrer que f présente un minimum local au point $(1,2)$.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire 2013-2014

SMI 3

Examen d'Analyse 3

Durée 3h

Exercice 1. Considérons la série entière réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de terme général a_n défini par :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad \text{et} \qquad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\,, \qquad n \geq 2.$$

1. Vérifier par récurrence que $|a_n| \leq 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit R le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que si $|x| < \dfrac{1}{4}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument. En déduire que $R \geq \dfrac{1}{4}$.
3. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.
   a) Montrer que $(2x^2 - 3x + 1)S(x) = 1$ pour tout $x \in]-R, R[$.
   b) Posons $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculer $P(\frac{1}{2})$. En déduire que $R \leq \dfrac{1}{2}$.
4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3x + 2x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$.
   i) Donner le développement en série entière de f au point 0 en précisant l'intervalle de convergence.
   ii) En déduire l'expression de a_n et la valeur de R.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, paire, vérifiant : $f(x) = (\pi - x)^2$ si $x \in [0, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que :

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = (\pi - x)^2 \qquad \forall\, x \in [0, \pi].$$

4. Calculer la somme des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant :

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in D.$$

Soit $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (xy, \frac{y}{x}) = (u,v)$, et soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = g \circ \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in D.$$

1. Déterminer la matrice jacobienne de φ. Montrer que $\varphi : D \longrightarrow D$ est un difféomorphisme de classe C^1.
2. Montrer que g est de classe C^1 sur D.
3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.
4. Montrer que l'equation (??) est équivalente à :

$$(2) \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{1+v^2}, \qquad (u,v) \in D.$$

5. Déterminer les solutions de l'equation (??). En déduire les solutions de l'equation (??).

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EL JADIDA

Année Universitaire 2012-2013

SMI 3

Examen d'Analyse 3

Durée 3h

Exercice 1. Considérons la série entière réelle $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de terme général a_n défini par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad n \geq 1.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence sur le bord du disque de convergence.
3. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, paire, vérifiant : $f(x) = \sin x \quad$ si $\; x \in [0, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Montrer que la série de Fourier de f converge. En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos 2px}{4p^2 - 1} = \sin x \qquad \forall\, x \in [0, \pi].$$

4. Calculer la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$ b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1}$ c) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $U =]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ deux parties de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant :

$$(1) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}, \qquad (x,y) \in D.$$

Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) = f \circ \varphi(r,\theta)$, $(r,\theta) \in U$.

1. Déterminer la matrice jacobienne de φ. Montrer que $\varphi : U \longrightarrow D$ est un difféomorphisme de classe C^1.
2. Montrer que g est de classe C^1 sur U.
   i) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
   ii) En déduire les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Montrer que l'equation 1 est équivalente à :

$$(2) \qquad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \operatorname{tg}\theta, \qquad (r,\theta) \in U.$$

4. Déterminer les solutions de l'equation 2. En déduire les solutions de l'equation 1.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire 2012-2013

SMI 3

Examen de rattrapage d'Analyse 3

Durée 3h

Exercice 1. Considérons la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n} + \log n}, \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$ est divergente.
2. Vérifier que $|\sin n| \geq \sin^2 n \ \forall\ n \geq 1$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ diverge.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ diverge.
4. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin k\right| \leq \frac{1}{\cos \frac{1}{2}}$, $\forall\ n \geq 1$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice 2. Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{n(n+x^2)} \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$$

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a \in]0, +\infty[$.
   i) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   ii) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

T.S.V.P.

Exercice 3. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \log(1 + x + x^2)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Donner le développement en série entière au voisinage du point $a = 0$ de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{1 - x^3}$. Préciser l'intervalle de convergence.
2. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{1 + x - 2x^2}{1 - x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{3n} + x^{3n+1} - 2x^{3n+2}\right) \qquad \forall\, x \in]-1, 1[.$$

3. En déduire le développement en série entière de f au point $a = 0$ en précisant l'intervalle de convergence.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences d'El Jadida
Département de Mathématiques
et Informatique

Année Universitaire 2011/2012

Semestre 3 : SMI

Examen : Analyse III

Durée 3 heures

Exercice 1. Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, de terme général $(a_n)_n$ défini par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = & 0, a_1 = 1 \\ a_n = & a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Soit R le rayon de convergence de cette série entière.

1. Montrer que $\quad 0 \leq a_n \leq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $|z| < \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument. En déduire que $R \geq \frac{1}{2}$.
3. Posons $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$.

   i) Montrer que S vérifie l'équation :
   $$(1 - z - z^2)S(z) = z\ , \quad \forall\ z \in D(0,R).$$

   ii) Vérifier que $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est une racine du polynôme $P(z) = 1 - z - z^2$. En déduire que $R \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = |\lambda|$.
4. Déterminer le développement en série entière de $g(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 2π, paire vérifiant $f(x) = \cos \alpha x \quad$ si $\quad x \in [0, \pi]$.

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.
2. Montrer que f est dérivable par morçeaux sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que :
$$\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx = \cos \alpha x\ , \quad \forall\ x \in [-\pi, \pi].$$
3. Montrer que
$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$
En déduire que :
$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 + n^2}{(\alpha^2 - n^2)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

Exercice 3. On se propose de trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4. \tag{1}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$\varphi(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)\ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (1). Considérons l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(u,v) = F \circ \varphi(x,y) = f(x,y)$$

   a) Montrer que l'application F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de F.
   c) En déduire que l'équation (1) est équivalente à :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 1. \tag{2}$$

3. i) Résoudre l'équation (2).
   ii) En déduire toutes les solutions de l'équation (1).

Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences - El jadida
Département d'informatique

SMA3 SMI3 (2013/2014)
Langage C

Examen
(1h30)

Exercice 1

Le Liber abaci (ou Liber abbaci) est un livre de Leonardo Fibonacci écrit en 1202. Dans cet ouvrage, Fibonacci présente les chiffres arabes et le système d'écriture décimale positionnelle qu'il avait appris en étudiant auprés de savants arabes à Béjaia au Maghreb où son père, Guglielmo Bonaccio, travaillait en tant que marchand (wikipedia).
Dans ce livre il décrit la croissance d'une population de lapins sous forme d'une suite que l'on a appelée suite de Fibonacci. Les 13 premiers termes de la suite sont : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. On peut définir la suite comme suit :

$u_1 = 1$

$u_2 = 1$

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$

Écrire un programme en langage C qui permet de calculer et afficher le terme u_n de cette suite en utilisant de préférence une fonction récursive.

Exercice 2

Le système d'écriture décimale positionnelle se base sur l'écriture polynomiale qui se généralise comme suit : pour un nombre N écrit en base b sous forme $N=(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ avec les $a_i \in \{0,1,2,\ldots,b-2,b-1\}$, son équivalent en base décimale est le nombre obtenu avec la forme polynomiale :

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i$$

Le cas de la base binaire b=2 les $a_i \in \{0,1\}$

Ecrire un programme en langage C qui demande à l'utilisateur de donner le nombre N écrit en base 2. N en binaire sera lu par le programme comme un texte (à stoker dans un tableau de cratères). Le programme compte et affiche le nombre de caractères de N en binaire. Ensuite il converti N à la base décimale et affiche le résultat en utilisant la forme polynomiale.

Exemple :

L'ordinateur :	l'utilisateur :	
Donner N en binaire :	1011011	
N contient 7 chiffres		(dans ce cas N en décimal = $2^6+2^4+2^3+2^1+2^0$)
N en décimal = 91		

Exercice 3

En mathématiques, de nombreuses suites ou séries convergent vers π ou vers un multiple de π. Parmi celle-ci se trouve la *série zêta de Riemann*, laquelle peut être définie comme suit:
$S_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots + 1/n^2$. Quand n est grand S_n tend vers $\pi^2/6$
Ecrire un programme en langage C qui demande à l'utilisateur un nombre entier n et calcule et affiche la somme S_n.

Exercice 4 Facultatif

Ecrire un programme qui crée une matrice de taille 128x128 de type « unsigned char » qui contient des raies horizontales blanches (255) de taille 8 pixels, espacées de 8 pixels noirs (0). La matrice sera stockée sur le disque dur sous forme de fichier (image) nommé raies.img.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences, El Jadida
Département de Mathématiques et Informatique

Année Universitaire 2012-2013
(SMA3-SMI3)
E.Module : Langage C

Examen
(Durée : 2h00)

I- Approximation de 2 par une série

On approche le nombre 2 à l'aide de la série
$S = 1/2^0 + 1/2^1 + 1/2^2 + \ldots + 1/2^N$
Avec N tendant vers une grande valeur.
Ecrire en langage C le programme, qui demande à l'utilisateur de donner un nombre N grand, puis calcule et affiche la somme S qui approxime 2, puis l'erreur d'approximation.

II- Trie de tableau à l'aide de fonctions

Ecrire en langage C les fonctions suivantes:

1. qui lit un tableau à n éléments ($1 \leq n \leq 100$), de type entier,
2. qui calcul l'indice du premier plus grand élément du tableau T,
3. qui insère un élément dans une position donnée, dans le tableau T,
4. qui supprime un élément d'une position donnée, du tableau T,
5. qui affiche les éléments du tableau T.

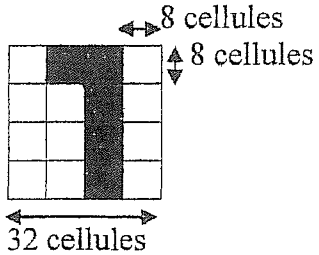
Ecrire le programme principal en langage C qui déclare un tableau à n éléments ($1 \leq n \leq 100$) entiers, puis lit le tableau, le classe par ordre croissant et l'affiche en utilisant les fonctions précédentes.

III- Extensions de fichier

Ecrire un programme en langage C saisissant un nom de fichier et affichant séparément le nom du fichier et l'extension. (le code ASCII du point . peut s'obtenir en écrivant : '.')
Par exemple : pour le nom de fichier : **exercice1.c** le programme affiche **exercice1 c.**
pour le nom de fichier : **rapport.doc** le programme affiche **rapport doc.**

Partie facultative : Matrice et image

Ecrire un programme qui crée une matrice de taille 32x32 de type unsigned char qui contient le dessin suivant :



La matrice sera stockée dans le disque dur sous forme de fichier nommé image.brut.

Les cellules blanches ont la valeur 255, et les cellules noires la valeur 0.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences, El Jadida
Département de Mathématiques
et Informatique

Année Universitaire 2011-2012
(SMA3-SMI3)
E.Module : Langage C

Examen
(Durée : 2h00)

EXERCICE 1

Ecrire un programme en C qui demande à l'utilisateur de taper un entier N et qui calcule u(N) défini par :
u(0)=3
u(1)=2
u(n)=n.u(n-1)+(n+1).u(n-2)+n

(Utiliser de **préférence** une fonction récursive)

EXERCICE 2

On considère la suite hongroise : u(0)=a (a entier)
si u(n) pair alors u(n+1)=u(n)/2 sinon u(n+1)=3*u(n)+1
Pour toutes les valeurs a, il existe un entier N tel que u(N)=1 (conjecture admise).
a) Ecrire un programme en C qui demande à l'utilisateur de taper a et qui affiche toutes les valeurs de u(n) de n=1 à n=N.

EXERCICE 3

On veut convertir un nombre décimal en binaire (mot de 8 bits) selon la méthode suivante:
Premièrement : tant que le nombre décimal est différent de zéro, on le divise par deux et on met le reste de la division dans un tableau (de taille 8).
Deuxièmement : on inverse les éléments du tableau.
1. Ecrire une fonction *metazero* qui met à zéro les éléments d'un tableau.
2. Ecrire une fonction *inverser* qui permet d'inverser les éléments d'un tableau.
3. Ecrire une fonction *convertir* qui permet de convertir un nombre décimal en binaire en utilisant les deux fonctions précédentes.
4. Ecrire une fonction *affiche* qui affiche les éléments d'un tableau sous forme d'un nombre binaire.
5. Ecrire le programme principal qui demande un nombre et l'affiche en binaire 8bits
Exemple: le nombre 13 vaut 00001101 en binaire

Méthode de division successive

```
13 | 2
 1 | 6 | 2
     0 | 3 | 2
         1 | 1 | 2
             1 | 0
```

Les prototypes des fonctions:
void metazero(int *tab, int nb);
void inverser(int *tab, int nb);
void convertir (int dec, int *tab, int nb);
void affiche (int *tab, int nb);
(Sachant que nb est le nombre d'éléments du tableau c.à.d. = 8)

EXERCICE 4

Proposer un programme en C qui lit dix phrases (chaînes de caractères) de tailles différentes (minimum 3 caractères, maximum 300 caractères). Les 10 chaînes seront stockées dans un tableau de 10 pointeurs, en réservant dynamiquement l'emplacement en mémoire pour chaque chaîne. Le programme classe ensuite par ordre alphabétique (sur les 3 premiers caractères) les 10 chaînes dans le tableau. Enfin, il les affiche sur l'écran en indiquant le nombre de mots de chaque phrase.
Le code ASCII de l'espace vide entre les mots est 8 (backspace).
Le code ASCII des caractères alphabétiques en majuscules est compris entre 65 (A) et 90 (Z)
Le code ASCII des caractères alphabétiques en minuscules est compris entre 97 (a) et 122 (z)

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences, El Jadida
Département de Mathématiques
et Informatique

Année Universitaire 2011-2012
(SMA3-SMI3)
E.Module : Langage C

Examen
(Durée : 2h00)

EXERCICE 1

Ecrire un programme en C qui demande à l'utilisateur de taper un entier N et qui calcule u(N) défini par :
u(0)=3
u(1)=2 (Utiliser de **préférence** une fonction récursive)
u(n)=n.u(n-1)+(n+1).u(n-2)+n

EXERCICE 2

On considère la suite hongroise : u(0)=a (a entier)
si u(n) pair alors u(n+1)=u(n)/2 sinon u(n+1)=3*u(n)+1
Pour toutes les valeurs a, il existe un entier N tel que u(N)=1 (conjecture admise).
a) Ecrire un programme en C qui demande à l'utilisateur de taper a et qui affiche toutes les valeurs de u(n) de n=1 à n=N.

EXERCICE 3

On veut convertir un nombre décimal en binaire (mot de 8 bits) selon la méthode suivante:
Premièrement : tant que le nombre décimal est différent de zéro, on le divise par deux et on met le reste de la division dans un tableau (de taille 8).
Deuxièmement : on inverse les éléments du tableau.
1. Ecrire une fonction *metazero* qui met à zéro les éléments d'un tableau.
2. Ecrire une fonction *inverser* qui permet d'inverser les éléments d'un tableau.
3. Ecrire une fonction *convertir* qui permet de convertir un nombre décimal en binaire en utilisant les deux fonctions précédentes.
4. Ecrire une fonction *affiche* qui affiche les éléments d'un tableau sous forme d'un nombre binaire.
5. Ecrire le programme principal qui demande un nombre et l'affiche en binaire 8bits
Exemple: le nombre 13 vaut 00001101 en binaire

Méthode de division successive

```
13 | 2
 1 | 6 | 2
     0 | 3 | 2
         1 | 1 | 2
             1 | 0
```

Les prototypes des fonctions:
void metazero(int *tab, int nb);
void inverser(int *tab, int nb);
void convertir (int dec, int *tab, int nb);
void affiche (int *tab, int nb);
(Sachant que nb est le nombre d'éléments du tableau c.à.d. = 8)

EXERCICE 4

Proposer un programme en C qui lit dix phrases (chaînes de caractères) de tailles différentes (minimum 3 caractères, maximum 300 caractères). Les 10 chaînes seront stockées dans un tableau de 10 pointeurs, en réservant dynamiquement l'emplacement en mémoire pour chaque chaîne. Le programme classe ensuite par ordre alphabétique (sur les 3 premiers caractères) les 10 chaînes dans le tableau. Enfin, il les affiche sur l'écran en indiquant le nombre de mots de chaque phrase.
Le code ASCII de l'espace vide entre les mots est 8 (backspace).
Le code ASCII des caractères alphabétiques en majuscules est compris entre 65 (A) et 90 (Z)
Le code ASCII des caractères alphabétiques en minuscules est compris entre 97 (a) et 122 (z)

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida

Module : Analyse 3, Durée de l'épreuve: 3^h, SMA3, 2011/2012

(Responsable : Prof. Lesfari, http://lesfari.com).

Exercice 1. a) Soit f une fonction positive et décroissante sur l'intervalle $[1, u]$, $\forall u \geq 1$. Montrer que la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

b) En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right),$$

est une constante (on ne cherche pas à déterminer explicitement cette constante).

Exercice 2. Soit (f_k) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ à termes positifs a_k, convergente.

a) Montrer que si

$$\forall x \in I, \quad |f_k(x)| \leq a_k,$$

alors la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge normalement sur I.

b) Montrer que si

$$\forall x \in I, \quad |f_k(x) - f_{k-1}| \leq a_k, \quad k \geq 2,$$

alors la suite de fonctions (f_k) converge uniformément sur I.

b) Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée. Que peut-on dire si la limite est simple ? (justifier la réponse).

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + (2-x)y' - y = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

a) Déterminer sous forme de série entière la solution de cette équation différentielle telle que : $y(0) = 1$.

b) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue?

c) Identifier cette solution sous forme d'une fonction classique.

Exercice 4. On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $C^1(\mathbb{R}^3)$. On pose,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = f\left(\cos x^2, xy, f(x,y,x)\right).$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F par rapport à x et à y en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On exprimera les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

N.B. *On apportera le plus grand soin à la présentation des calculs ainsi qu'aux commentaires sur les résultats.*

UNIVERSITÉ CHOUAÏB DOUKKALI
Faculté des Sciences El Jadida
Département de Mathématiques
et Informatique

Licence Mathématiques Appliquées
Elément de Module
Analyse Numérique
2011/2012

EXAMEN
Janvier 2012
Durée 1H30

PROBLEME

On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où α, β, γ et δ sont des paramètres réels.

1) Sous quelles conditions le système $Ax = b$ admet une solution unique?

On suppose désormais que ce système admet une solution unique.

2) Ecrire la méthode de Jacobi et celle de Gauss-Seidel sous forme de systèmes itératifs pour résoudre $Ax = b$.

3) Fournir des conditions nécessaires et suffisantes afin que

a) la méthode de Jacobi converge.

b) la méthode de Gauss-Seidel converge.

4) On prend $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = 0$ et $\delta = 1$.

a) Vérifier que la méthode de Gauss-Seidel converge.

b) Calculer par cette méthode la solution du système $Ax = b$ à 10^{-1} près (solution approximative avec un chiffre exact après la virgule).

5) Trouver la décomposition LU de la matrice paramétrée A.

6) En reprenant les valeurs des paramètres de la question 4), retrouver la solution du système $Ax = b$ par cette méthode LU.

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida
Module : Analyse 3, Durée de l'épreuve: 3^h, *SMA3, 2012/2013*

(Responsable : Prof. Lesfari, http://lesfari.com).

<u>Exercice</u> **1.** Développer en série de Fourier la fonction suivante :

$$x \longmapsto e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

<u>Exercice</u> **2.** On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. On pose,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = f\left(\cos x^2, xy, f(y,y,y)\right).$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F par rapport à x et à y en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On exprimera les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

<u>Exercice</u> **3.** Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

et considérons la série complexe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^k}.$$

a) Déterminer le domaine de convergence D de cette série.

b) Montrer que cette série converge absolument sur Ω.

c) Montrer que cette série ne converge pas uniformément sur Ω.

d) Montrer que si on multiplie le terme général de cette série par $(-1)^k$, il y a alors convergence uniforme sur Ω.

<u>Exercice</u> **4.** 1) (Question de cours). Enoncer et démontrer le critère de comparaison pour les séries numériques.

2) Soit (a_k) une suite de nombres réels strictement positifs définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \ln(1 + a_k).$$

a) Les séries numériques $\sum a_k$ et $\sum a_{k+1}$ sont elles de même nature? Justifier votre réponse.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k x^k$ et étudier son comportement sur le bord de son intervalle de convergence.

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida
Module : Analyse 3, Rattrapage, Durée : 3^h, *SMA3, 2012/13*

(Responsable : Prof. Lesfari, http://lesfari.com).

Exercice 1. L'objet de cette question est d'établir une condition suffisante de différentiabilité d'une fonction f de deux variables réelles x et y. Montrer que si l'une des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f existe au point (a, b) et si l'autre dérivée partielle existe dans un voisinage de (a, b) et que de plus cette dernière est continue en (a, b), alors la fonction f est différentiable en (a, b).(*Noter que dans ce résultat, la condition suffisante de différentiabilité de f consiste à utiliser la continuité d'une des dérivées partielles mais pas les deux!*).

Exercice 2. Etudier la différentiabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Déterminer l'intervalle de convergence et la somme de la série entière réelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha^k)}{k} x^k, \quad \alpha \neq 0$$

dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = 1$.

b) $\alpha = -1$.

c) $|\alpha| \neq 1$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^3 kx}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et désignons par S la somme de cette série.

b) Montrer que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que S est développable en série de Fourier.

d) Déterminer explicitement S.

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida
Module : Analyse 3, Durée de l'épreuve: 3^h, SMA3, 2013/2014

(Responsable : Prof. Lesfari, http://lesfari.com).

Exercice 1. On considère la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k$ où

$$f_k(x) = \frac{x}{k^\alpha + x^2 k^{\alpha+\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

a) Etudier selon les valeurs des paramètres α et β la convergence simple de cette série sur $\mathbb{R}$.

b) On désigne par S la somme de cette série. Déterminer une condition (si elle existe) sur les paramètres α et β pour que S soit continue sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose que la série converge simplement et que $\alpha + \frac{\beta}{2} \leq 1$. Etudier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. a) Montrer que la fonction $x \longmapsto e^{\cos x}\cos(\sin x)$, est développable en série de Fourier. Déterminer cette série ainsi que le domaine de convergence uniforme.

b) En déduire, si possible, la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 3. 1) Montrer que si $\sum a_k z^k$ (resp. $\sum(-1)^k a_k z^k$) est une série entière complexe de rayon de convergence égal à 1 et si $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k > a_{k+1}$ avec $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, alors la série $\sum a_k z^k$ (resp. $\sum(-1)^k a_k z^k$) converge en tout point du bord du disque de convergence sauf peut-être au point $z = 1$ (resp. $z = -1$).

2) Etudier les séries entières suivantes (rayon de convergence, convergence sur le bord du disque de convergence) :

$$a) \sum \frac{z^{pk}}{k}, \qquad b) \sum \frac{(-1)^k}{k \ln k} z^k.$$

Exercice 4. Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 u(x) + y^2 u(y),$$

où $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto u(t)$, est une fonction égale à 1 si $t \in \mathbb{Q}$ et égale à 0 sinon.

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida
Module : Analyse 3, Rattrapage, Durée : 3^h, SMA3, 2013/14

(Responsable : Prof. Lesfari, http://lesfari.com).

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^2$? Justifier la réponse.

Exercice 2. a) Montrer que le produit infini suivant converge et déterminer sa valeur :

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

b) Montrer que l'étude du produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} a_k$, $a_k > 0$, se ramène à celle de la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \ln a_k$. De plus, on a $P = e^S$, où P est la valeur de $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ et S est la somme de $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$.

Exercice 3. a) Enoncer et démontrer le critère de Weierstrass concernant la convergence normale d'une série de fonctions.

b) Montrer que si (f_k) est une suite de fonctions positive, décroissante et converge uniformément vers 0 alors la série alternée $\sum(-1)^{k+1} f_k$ converge uniformément sur Ω.

c) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions

$$\sum \frac{(-1)^k}{2\sqrt{k}+\cos x}.$$

Exercice 4. On considère la série entière de somme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}.$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série et montrer que $f(x)$ vérifie une éqution différentielle linéaire du 3ème ordre à coefficients constants.

b) Déterminer explicitement $f(x)$.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
El Jadida 2013-2014

Examen Rattrapage d' Algèbre
Durée 3h, Niveau: SMA3

Exercice 1: Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que

$$\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^5 + 16f = 0 \end{cases}$$

1) Quel est le polynôme minimal de f
2) En déduire la valeur de f

Exercice 2: Quelles sont les réduites de Jordan possibles pour:
- La matrice A de polynômes caractéristique et minimale respectifs;

$$P_A(X) = (X-1)^4 (X-2)^2 \text{ et } M_A(X) = (X-1)^2 (X-2)$$

- La matrice B de polynômes caractéristique et minimale respectifs;

$$P_B(X) = (X-1)^5 \text{ et } M_B(X) = (X-1)^3$$

et dont l'espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par la famille $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\}$.

Exercice 3: Soit pour m un reel, la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2) Quelles sont les valeurs propres de A_m? Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m n'admet que des valeurs propres simples. En déduire que si $m \notin \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, la matrice A_m est diagonalisable.
3) On suppose $m = 1$. Calculer rgA_1 et le polynôme minimale de A_1. A_1 est -elle diagonaliseable?
4) Montrer qu'il existe deux s.e.v., F_1 et F_2 tels que $IR^3 = F_1 \oplus F_2$.
5) Déterminer une base de Jordan associée à A_1.

6) On suppose $m = -\frac{1}{2}$. Déterminer les valeurs propres de $A_{-\frac{1}{2}}$. $A_{-\frac{1}{2}}$ est -elle diagonalisable.

Exercice 4: Soient E un IK - espace vectoriel de dimension finie, f et g deux formes linéaires sur E telles que

$$\ker f = \ker g$$

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in IK$ tel que $f = \alpha g$.

2) Montrer que l'ensemble des matrices de traces nulles est un espace vectoriel, déterminer sa dimension.

Exercice 5: Soient $E = IR_3[X]$ et $B^* = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la famille des formes linéaires définies sur E par,

$$\varphi_i(P) = P(i), \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3.$$

1) Montrer que la famille B^* forme une base de l'espace duale E^*.

2) Déterminer la base B de E dont B^* est la base duale.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
El Jadida

A. U. 2013-2014

Examen d' Algèbre
Durée 3h, Niveau: SMA3

Exercice 1: Soit J la matrice $(n \times n)$ suivante

$$J = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de J
2) Trouver une relation entre J et J^2
3) Endéduire les valeurs propres de J
4) Donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimale de J
5) J est - elle inversible ?
6) Déterminer une base de Jordan associée à J

Exercice 2: Soient E un C - espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 - 3f + 2Id = 0$$

1) Montrer que f est un automorphisme
2) On suppose que $f \neq \lambda Id$, pour tout $\lambda \in IN$. Montrer que

$$E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$$

Exercice 3: Soient E un C - espace vectoriel de dimension 5 et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 = 0$$

1) Montrer que

$$rgf < \dim \ker f$$

2) Montrer que

$$\dim \ker f \in \{3, 4\}$$

3) Quelles sont les matrices de Jordan possibles associées à f ?

Exercice 4: Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires définies sur IR^2 par,

$$f_1(x,y) = x + y \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x - y$$

1) Montrer que $\{f_1, f_2\}$ forme une base de l'espace duale $(IR^2)^*$.
2) Déterminer la base de IR^2 dont $\{f_1, f_2\}$ est la base duale.
3) Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base $\{f_1, f_2\}$,

$$g(x,y) = x \quad \text{et} \quad h(x,y) = 2x - 6y$$

Exercice 5: Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *et* φ des formes linéaires sur un IK-- espace vectoriel E, de dimension finie. Montrer que

$$\varphi \in Vect(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \qquad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$$

Application: Dans IR^3, donner l'équation du plan P contenant la droite (D) d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

et le vecteur $u = (1, 1, 1)$.

EXAMEN - Session normale

(Janvier 2012 - Durée: 3H)

EXERCICE 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^{99}.

EXERCICE 2 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

On considère des formes linéaires $\varphi_1, ..., \varphi_p \in E^*$. (E^* étant l'espace vectoriel dual de E)

1) Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ x &\longmapsto \phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_p(x)) \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\phi \text{ est surjective } \Leftrightarrow \{\varphi_1, ..., \varphi_p\} \text{ est libre dans } E^*.$$

2) Soit $\psi \in E^*$ et $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(1 \leq k \leq p)$.

Montrer que : $\psi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi_k \Leftrightarrow \bigcap_{k=1}^{p} Ker(\varphi_k) \subset Ker(\psi)$.

EXERCICE 3 : On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de sa base canonique $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$.

Notons $\mathbf{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathbf{B}$ dans l'espace vectoriel dual $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on définit les formes linéaires ψ_1, ψ_2 et ψ_3 pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\psi_1(P) = \varphi_1(P), \quad \psi_2(P) = P(1), \quad \psi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1) Montrer que $\mathbf{C}^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

2) Donner la matrice de passage de la base $\mathbf{B}^*$ à la base $\mathbf{C}^*$.

3) Déterminer la base $\mathbf{C} = \{P_1, P_2, P_3\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dont $\mathbf{C}^*$ est la base duale.

PROBLEME : On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathbf{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

Partie I. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^5$ tel que $f^2 = 0_{L(\mathbf{R}^5)}$

1) Donner le polynôme caractéristique $P_f(X)$ et le polynôme minimal $m_f(X)$ de f.

2) a) Montrer que $rg(f) \prec \dim Ker(f)$.

   b) Donner les valeurs possibles de $\dim Ker(f)$.

3) En déduire les réduites de Jordan possibles de la matrice $A = M(f, \mathbf{B}_c)$.

Partie II. Dans $\mathbf{R}^5$, on considère les vecteurs u_i, $1 \leq i \leq 5$, définis par :

$$
\begin{aligned}
&u_1 = e_1, \ \ u_2 = e_1 + e_2, \\
&u_3 = e_1 + e_2 + e_3, \\
&u_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad \text{et} \\
&u_5 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5.
\end{aligned}
$$

1) a) Vérifier que $\mathbf{C} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ est une base de l'e.v $\mathbf{R}^5$.
   b) Donner les matrices de passage P de $\mathbf{B}_c$ à $\mathbf{C}$ et Q de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{B}_c$.

2) Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^5$ dont la matrice par rapport à la base $\mathbf{C}$ est :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} = M(g, \mathbf{C}).
$$

   α) Déterminer la matrice $B = M(g, \mathbf{B}_c)$ de g par rapport à la base $\mathbf{B}_c$.

   β) Trouver le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de la matrice A.

   γ) Comparer $P_A(X)$ et $P_B(X)$.

3) i) Trouver la dimension de chacun des sous-espaces propres $E_B(\lambda)$ où $\lambda \in Sp(B)$.

   ii) En déduire la forme J d'une réduite de Jordan de la matrice A.

   iii) En déduire aussi le polynôme minimal $m_A(X)$ de A.

4) Donner une base de jordanisation $\mathbf{B}_J$ adaptée à la forme J.

EXAMEN-SESSION NORMALE - Janvier 2013

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne les corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$- e.v E, on note $P_f(X)$ et $m_f(X)$ ses polynômes caractéristique et minimal respectifs, $tr(f)$ est la trace de f.

$E_f(\lambda)$ est le sev propre de E associé à une valeur propre λ et $Sp(f)$ désigne le spectre de f.

EXERCICE 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $\{f_1, ..., f_p\}$ une famille libre dans E^* (e.v dual de E) et soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille de p vecteurs linéairement indépendants dans E.

On définit un endomorphisme φ de E par :

$$\varphi(x) = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + ... + f_p(x)u_p, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

a) Exprimer $Ker(\varphi)$ en fonction de $[\ sev\langle\{f_1, ..., f_p\}\rangle\ ]^\circ$.

b) En déduire le rang de φ.

EXERCICE 2 : Soit $f \in L(E)$, E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1) Montrer que $tr(f)$ = somme des valeurs propres de f.

2) On suppose que $rg(f) = 1$.

a) Montrer que 0 est une v.p de f.

b) En déduire une expression de $P_f(X)$.

c) Montrer que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow tr(f) \neq 0$

EXERCICE 3 :

Déterminer la forme de Jordan de la matrice suivante et en donner le polynôme minimal :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4 : Soit $A \in \mathbf{M}_7(\mathbf{R})$ telle que $P_A(X) = -(X-1)^3(X-2)^4$.

Donner les réduites de Jordan possibles de la matrice A, dans les cas suivants :

1) $\dim E_A(1) = \dim E_A(2) = 2$.

2) $m_A(X) = (X-1)^2(X-2)^3$.

3) $m_A(X) = (X-1)^2(X-2)^2$.

4) $\dim E_A(1) = 3$ et $\dim E_A(2) = 4$.

5) $m_A(X) = (X-1)(X-2)$.

EXERCICE 5 : Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $tr(A) \neq 0$. On considère l'application :

$$\varphi : \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$$
$$M \longmapsto \varphi(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

1) Montrer que $\varphi \in L(\mathbf{M}_n(\mathbf{K}))$.

2) Soit $T_1 = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \,/\, tr(M) = 0\}$ et $T_2 = sev\langle A \rangle$.

Montrer que T_1 et T_2 sont des sev propres de φ.

3) En déduire que φ est diagonalisable et écrire la matrice réduite associée à φ.

4) Donner le polynôme $m_\varphi(X)$.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES EL JADIDA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2013/2014

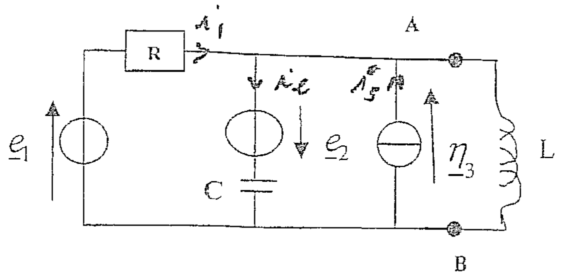
Examen: Electricité 2 : Filières : SMA3 - SMI3

Durée : 1h 30 min

Exercice 1 : (12 pts)

1. En utilisant le **théorème de Norton** ;

Déterminer le courant complexe ($\underline{i}_L$) ; qui circule dans la bobine pure (***Branche AB***) de la figure ci-contre, en fonction de $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{\eta}_3$, R, L, C et de la pulsation ω.
On transforme d'abord les générateurs de tension en générateurs de courant.



2. Retrouver l'expression de $\underline{i}_L$ par application du **théorème de Thevenin**.

3. Retrouver l'expression de $\underline{i}_L$ par application du **théorème de Millman**.

Exercice 2 : (8 pts

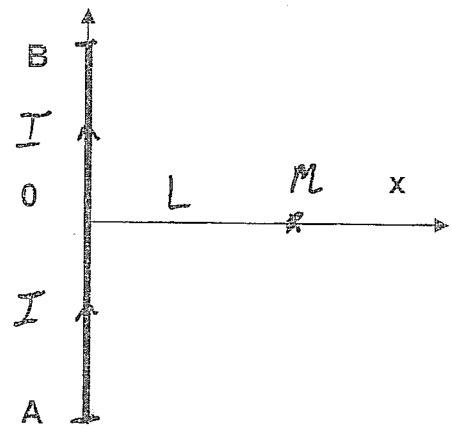
1. Calculer le champ magnétique créé en un point M par un *fil rectiligne ; de longueur finie* AB = 2L parcouru par un courant I ; en un point M de sa médiatrice. **M (x=L ; 0)**

2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par *un fil rectiligne **indéfini*** parcouru par le courant I en un point **M** de sa médiatrice. **M (x=L ; 0)**

3. Quels sont les propriétés de symétries et d'invariances de cette distribution de courant dans le cas *un fil rectiligne **indéfini*** ?

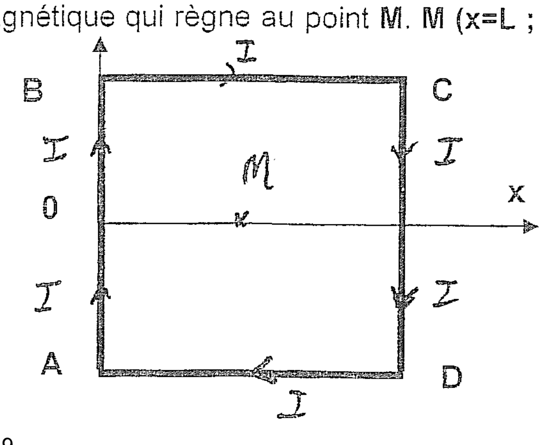
4. Quelle est la forme des lignes de champs magnétiques passant par le point **M**.

5. Retrouver l'expression du champ magnétique résultat par application du **théorème d'Ampère**.



On considère un fil conducteur de Longueur **8 L** parcouru par un courant **I** qui forme une spire carrée **ABCD** de coté **2L.**

6. Déterminer l'expression du champ magnétique qui règne au point **M**. **M (x=L ; 0) situé au centre de la spire.**



UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
- El JADIDA-

Année 2010/2011
Filières : SMA_3-SMI_3
Module : PHYSIQUE3

EXAMEN session de rattrapage
ELECTROMAGNETISME

question de cours

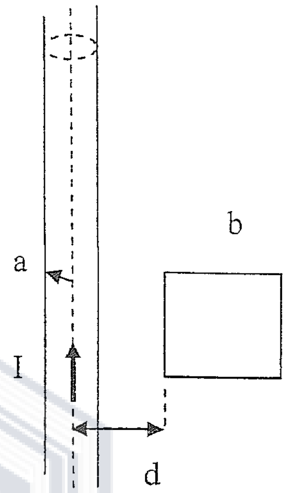
Etablir l'équation de Maxwell- Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} + \dfrac{d\vec{B}}{dt} = \vec{0}$

Exercice 1

Un conducteur cylindrique de rayon $R_1 = a$, de longueur supposée infinie, d'axe Δ parallèle à Oz et traversé par un courant d'intensité I (figure ci-contre).

1. Enoncer le théorème d'Ampère
2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M :

2.1. Le point M est à l'intérieur du cylindre,
2.2. Le point M est à l'extérieur du cylindre.
2.3. Le point M est à la surface du conducteur (r=a)



3. On considère un cadre de forme carrée de côté b (figure ci-contre). Ce cadre est entouré d'un fil conducteur.

Donner le flux du champ magnétique de $\vec{B}(M)$ à travers la surface du cadre.

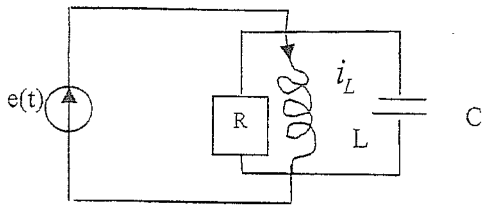
4. Le conducteur fait partie d'un câble coaxial. Ce câble est modélisé selon un cylindre infini plein de rayon $R_1 = a$ (le conducteur cylindrique défini ci-dessus) parcouru par un courant d'intensité +I et deux cylindres infinis coaxiaux de rayons $R_2 > R_1$ et R_3 tels que l'espace $R_2 < r < R_3$ délimite un conducteur cylindrique (conducteur 2) parcouru par un courant d'intensité –I.

Déterminer le champ magnétique en un point M de l'espace $R_2 < r < R_3$ (dans le conducteur 2) et $r > R_3$ (à l'extérieur des conducteurs).

Exercice 2

Le groupement R, L, C parallèle de la figure ci-contre est alimenté par une source de tension de f.é.m $e = E_m \cos \omega t$.

On note i le courant global et i_L le courant circulant dans la bobine pure.



1. Déterminer l'admittance complexe $\underline{Y}_{eq}$ du circuit.
2. Déterminer le courant $\underline{i_L}$ (en notation complexe) en fonction de $\underline{i}$, $\underline{Y}_{eq}$ et $\underline{Y}_L$.
3. Déterminer le déphasage φ de i_L par rapport à i en fonction de R, L C et ω .

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
- El JADIDA-

Année 2011/2012
Filières : SMA_3-SMI_3
Module : PHYSIQUE3

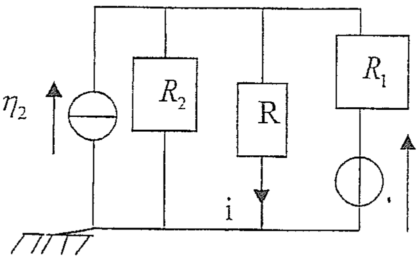
EXAMEN session normale
ELECTROMAGNETISME

Exercice 1

On considère le circuit de la figure 1.
Calculer l'intensité du courant qui circule dans la branche comportement R par deux méthodes :
1°) Application du **théorème de Thévenin ;**
2°) Application du **théorème de Norton.**

Données : $\eta_2 = 1A$, $E_1 = 6V$, $R_2 = 2R_1 = R = 100\Omega$

Figure 1



Exercice 2

Un câble coaxial est formé par ;
- Un conducteur filiforme parallèle à Z'Z est traversé par un courant d'intensité I (figure 2).
- un conducteur cylindrique d'épaisseur négligeable (donc de rayon R), de longueur supposée infinie, d'axe Z'Z, est traversé par un courant d'intensité I (dans le sens indiqué par la figure 2)

1. Enoncer le théorème d'Ampère sous sa forme locale et intégrale.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M :

2.1. Le point M (r<R) entre le fil et le cylindre,
2.2. Le point M r>R est à l'extérieur du cylindre.

3. Tracer B(r).

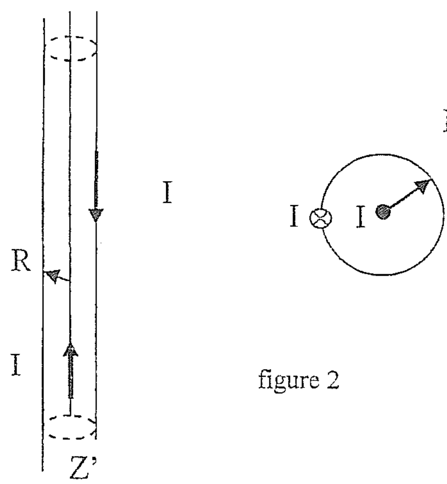


figure 2

Exercice 3 :

1°) Déterminer le courant complexe $\underline{i}_R$ circulant dans la résistance pure (figure 3), en fonction de $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{\eta}$, r, L, C et de la pulsation ω, en utilisant le **théorème de Norton.**
$\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{\eta}$, en régime sinusoïdal forcé, sont en phase.
2°) Retrouver l'expression de $\underline{i}_R$ par application du **théorème de Millmann.**

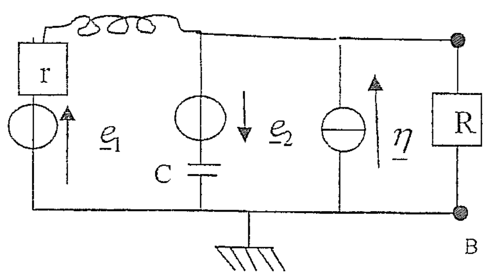


Figure 3

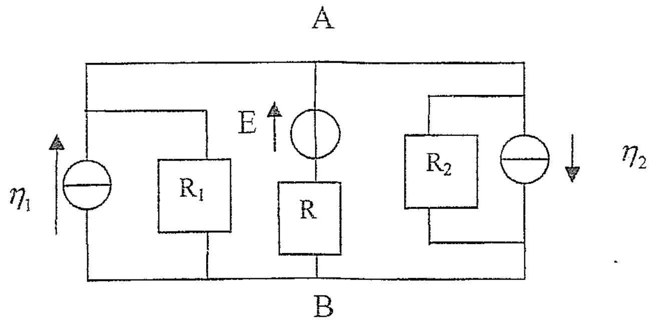
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES - EL JADIDA

Examen Elec 2 / Module Physique 3 / Filières : SMP$_3$
Session rattrapage / Février 2014
Durée : 1h30

EXERCICE 1

On considère le circuit ci-contre.
Par application du théorème de Thévenin, calculer l'intensité du courant qui traverse la fém E et R. Préciser le sens du courant.

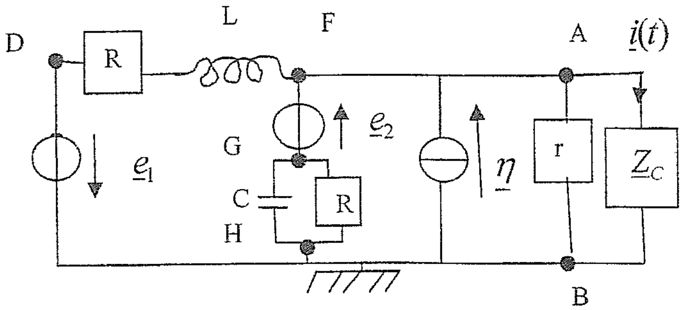
On donne :
$\eta_1 = 1A,\ \eta_2 = 2A,\ E = 1V, R_1 = 10\Omega,$
$R_2 = 20\Omega,\ et\ R = 1\Omega$



EXERCICE 2

On considère le circuit de la figure ci-contre.

$e_1(t) = 2\cos 2000\pi t$,
$e_2(t) = 4\cos(2000\pi t)$
$\eta(t) = 2\cos 2000\pi t$



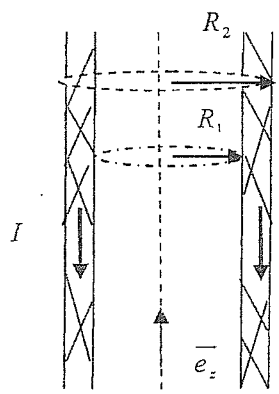
1°) Donner les expressions, en notation complexe, des forces électromotrices : $\underline{e}_1(t)$, $\underline{e}_2(t)$

2°) Tracer en représentation de Fresnel $\underline{e}_1(t)$ et $\underline{e}_2(t)$ pour $\omega t = \frac{\pi}{4}$.

3°) **Par application du théorème de Norton**, déterminer l'expression du courant en notation complexe $\underline{i}(t)$ qui traverse la charge $\underline{Z}_C$.

Exercice 3

On considère un conducteur cylindrique, **sous forme d'un tube**, de longueur supposée infinie, de rayon intérieur R_1= 3 mm et de rayon extérieur R_2=5mm. Il est parcouru par un courant d'intensité I=5A dans le sens de sa longueur. Le sens du courant est opposé à $\vec{e}_z$ (figure ci-contre).



1°) Calculer la norme du vecteur densité de courant $\vec{J}$.
2°) Calculer la résistance électrique R par unité de longueur.
3°) Enoncer le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale.
4°) Donner l'expression du théorème d'Ampère sous sa forme locale.

5°) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace créé par ce conducteur. Préciser le sens et la direction de $\vec{B}(M)$.
6°) Tracer l'allure de B(r).
7°) En déduire l'expression du potentiel - vecteur $\vec{A}(M)$ correspondant.

On donne : la perméabilité magnétique du vide $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$

Question de Cours

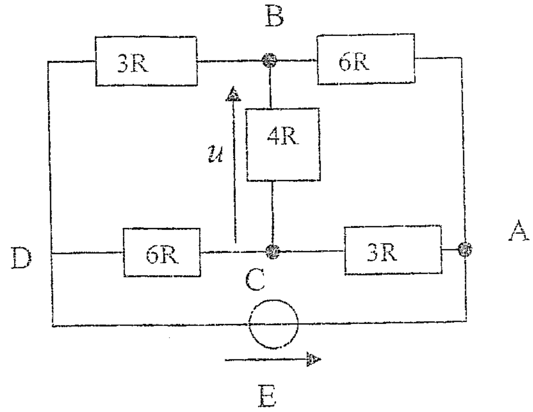
Vérifier que l'équation de Maxwell- Ampère dans le vide avec sources est bien compatible avec la loi de conservation de la charge électrique.

(Nombre de pages : 01)

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

Examen Electricité II/ Module Physique 3
Filière : SMP3
Session normale / Janvier 2013
Durée : 1h 30
(2 PAGES)

Exercice 1 :



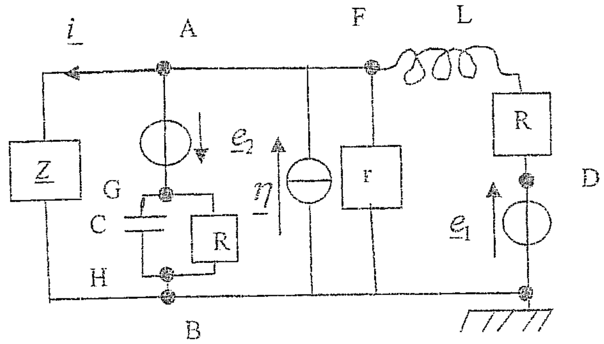
On veut calculer la tension u dans le circuit représenté par la figure ci-contre. On prend $V_D = 0$. Sachant que ($E = 6V$, $R = 10\Omega$)

1°) Ecrire d'abord la loi des nœuds en terme de potentiels aux points B et C (exprimer V_B et V_C).

2°) Ensuite, en déduire u.

Exercice 2

On considère le circuit représenté ci-dessous.



$e_1(t) = 2\cos 2000\pi t$,
$e_2(t) = 4\cos 2000\pi t$
$\eta(t) = 2\cos 2000\pi t$

$L = 0{,}4\ H$, $R = 500\Omega$, $C = 0{,}4\ \mu F$,
$r = 10\ \Omega$ et $\underline{Z} = 500 + j\,2512$.

1°) Exprimer en représentation de Norton le générateur ($\underline{e_2}(t)$, $\underline{Z_2} = \underline{Z_{GH}}$).

2°) Exprimer en représentation de Thévenin le générateur ($\underline{\eta}(t)$, $\underline{Z_r}$).

3°) **Par application du théorème de Thévenin**, déterminer l'expression de l'intensité du courant complexe $\underline{i}$ circulant dans le dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ (**sans valeurs numériques**).

4°) En déduire la valeur de l'intensité efficace correspondante à i.

Exercice 3 :

On considère un solénoïde parcouru par un courant d'intensité I. Le solénoïde, de longueur l_s et de rayon R, est constitué de N spires identiques coaxiales et jointives.
La densité d'enroulements, qui est le nombre de spires par unité de longueur, est n.

On se place dans les conditions de l'approximation du solénoïde de longueur infiniment long ($l_s \gg R$).

1) Par **application du théorème d'Ampère**, déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de son intérieur. Préciser sur un schéma aussi le sens $\vec{B}$.

2) Déterminer le coefficient d'auto-induction L de ce solénoïde.

3) Déterminer l'expression de la densité d'énergie magnétique volumique emmagasinée par le solénoïde en fonction de :

3-a) L et I

3-b) μ_0 et B.

Question de Cours

1°) Donner les expressions des équations de Maxwell dans le vide **avec sources.**

2°) Etablir l'expression du théorème de Poynting dans le vide en **l'absence de sources.**

On donne : $div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\overrightarrow{rot}\,\vec{b}$